

## DESENVOLVIMENTO E IMPLEMENTAÇÃO DE TÉCNICAS PREDITIVAS PARA A PROPAGAÇÃO DE TRINCAS EM COMPÓSITOS USANDO O MÉTODO DUAL DE ELEMENTOS DE CONTORNO

**Fernando L. Torsani**

**Paulo Sollero**

Universidade Estadual de Campinas, Departamento de Mecânica Computacional  
Cx. P. 6122 – 13083-970 – Campinas, SP, Brasil

**Resumo.** *Este trabalho apresenta a teoria de Tsai-Hill para a propagação de trincas em materiais anisotrópicos aplicada em um software de elementos de contorno. O objetivo do software é determinar a direção de propagação de trincas bem como a intensidade das tensões atuantes e deformações resultantes em peças planas fabricadas em materiais compósitos laminares. Os resultados numéricos obtidos foram comparados a resultados obtidos através da teoria da mínima densidade de energia de deformação para propagação de trincas para a validação dos mesmos.*

**Palavras-chave:** *Método dual dos elementos de contorno, Materiais compósitos, Técnicas predictivas, Anisotropia*

### 1. INTRODUÇÃO

É cada vez mais freqüente a utilização de materiais compósitos de alta performance na construção de máquinas e estruturas devido as suas ótimas propriedades físicas, químicas e mecânicas, combinando alta resistência mecânica com baixo peso e resistência à corrosão. Porém grande parte das técnicas de análise utilizadas no projeto de componentes mecânicos está voltada para o emprego de metais e materiais homogêneos e isotrópicos.

O objetivo deste trabalho é estudar técnicas de análise, em particular técnicas para a predição de propagação de trincas em materiais compósitos laminados, bem como a sua implementação computacional utilizando o método dual dos elementos de contorno.

Dentre as teorias conhecidas para propagação de trincas em materiais anisotrópicos foi escolhida para implementação uma extensão da teoria de Tsai-Hill desenvolvida por (Zhang & Tsai, 1989), a qual define o ângulo preferencial para a propagação de uma trinca.

A rotina implementada foi inserida em um programa de elementos de contorno desenvolvido por (Sollero, 1994) que, utilizando o método dual dos elementos de contorno, calcula, a cada iteração, os valores necessários à rotina de cálculo da direção de propagação da trinca.

## 2. MECÂNICA DOS MATERIAIS COMPÓSITOS

A mecânica dos materiais estuda as tensões, esforços e deformações em estruturas de engenharia submetidas a forças mecânicas e térmicas. Uma hipótese comum na mecânica dos materiais convencionais, como o aço e o alumínio, é que estes são homogêneos e isotrópicos. Para um material homogêneo, as propriedades não dependem da localização e, para um material isotrópico, as propriedades não dependem da orientação. A menos que trabalhe em baixíssimas temperaturas, os grãos dos materiais metálicos são aleatoriamente orientados de modo que, com base estatística, a hipótese de isotropia pode ser justificada. Os compósitos reforçados com fibras, por outro lado, são microscopicamente não homogêneos e não isotrópicos (ortotrópicos). Como resultado, a mecânica desses compósitos é mais complexa do que a dos materiais convencionais.

Duas hipóteses diferentes são usadas na mecânica dos materiais compósitos reforçados com fibras:

1 - A hipótese micromecânica, na qual a interação dos materiais constituintes é examinada na escala microscópica. As equações que descrevem as características elásticas e térmicas de uma lamina são, em geral, baseadas em formulações micromecânicas.

2 - A hipótese macromecânica, na qual a resposta do material compósito às forças mecânicas e térmicas é examinada em escala macroscópica. O material é assumido como sendo homogêneo. As equações da elasticidade ortotrópica são utilizadas para calcular tensões, esforços e deflexões.

Utilizaremos neste trabalho a hipótese macromecânica considerando, como dito acima, o material homogêneo e com propriedades definidas a partir das propriedades dos seus componentes, fibras e matriz, por (Sih, 1991):

$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m \quad (1)$$

$$E_2 = \left[ \frac{E_{f2} + E_m + (E_{f2} - E_m) V_f}{E_{f2} + E_m - (E_{f2} - E_m) V_f} \right] E_m \quad (2)$$

$$\nu_{12} = \nu_f V_f + \nu_m V_m \quad (3)$$

$$\nu_{23} = \nu_f V_f + \left[ \frac{1 + \nu_m - \nu_{12} E_m / E_1}{1 - \nu_m^2 + \nu_m \nu_{12} E_m / E_1} \right] \nu_m V_m \quad (4)$$

$$G_{12} = \left[ \frac{G_f + G_m + (G_f - G_m) V_f}{G_f + G_m - (G_f - G_m) V_f} \right] G_m \quad (5)$$

Onde  $E$  é o módulo de elasticidade,  $\nu$  é a razão de Poisson,  $G$  é o módulo cruzado,  $V$  é a fração do volume relativa a cada componente. O índice  $m$  refere-se às propriedades da matriz enquanto o índice  $f$  às propriedades da fibra. Os índices 1 e 2 referem-se respectivamente às direções longitudinal e transversal às fibras do compósito.

### 3. ELASTICIDADE ORTOTRÓPICA

A teoria de laminação clássica empregada para prever esforços de camadas superpostas normalmente assume uma elasticidade linear e um comportamento ortotrópico. Muitos compósitos não são linearmente elásticos, mas para fornecer uma relação tensão-deformação mais geral corre-se o risco de criar uma análise mais complicada do que útil.

A Lei de Hooke generalizada pode ser escrita como (Sih & Skudra, 1985):

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} \quad (6)$$

Onde  $\sigma_{ij}$  é o tensor tensão,  $e_{ij}$  é o tensor deformação, e  $C_{ijkl}$  é um tensor de quarta ordem das propriedades elásticas do material. O tensor  $e_i$  e a deformação  $\epsilon$  são relacionados para as três componentes cartesianas de posição  $u$ ,  $v$  e  $w$  por:

$$\begin{aligned} e_x = \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_y = \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_z = \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ 2e_{xy} = \epsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ 2e_{yz} = \epsilon_{yz} = \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ 2e_{zx} = \epsilon_{zx} = \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (7)$$

A Lei de Hooke pode ser reescrita como:

$$e_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (8)$$

Onde  $S_{ijkl}$  é o tensor de elasticidade de quarta ordem.

As camadas da maioria dos componentes estruturais são dependentes do plano de tensão. O relacionamento para uma lamina ortotrópica em um estado de tensão plana ( $\sigma_3 = \tau_{13} = \tau_{23} = 0$ ) pode ser escrito como:

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{matrix} \right\}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}_k \left\{ \begin{matrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{matrix} \right\}_k \quad (9)$$

Onde os componentes da matriz de rigidez reduzida  $Q_{ij}$  são:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= E_{11} / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \\ Q_{22} &= E_{22} / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \\ Q_{12} &= \nu_{21}E_{11} / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \\ Q_{66} &= G_{12} \\ Q_{16} &= Q_{26} = 0 \\ \nu_{12}E_{22} &= \nu_{21}E_{11} \end{aligned} \quad (10)$$

$E_{11}$ ,  $E_{22}$ ,  $\nu_{12}$  e  $G_{12}$  são as quatro constantes elásticas independentes da lamina com respeito aos eixos (1-2) de simetria do material, sendo que  $E_{11}=E_1$  e  $E_{22}=E_2$ . Transformando a Eq. (9) para o sistema de eixos do laminado ortotrópico x-y resulta em:

$$\{\sigma_{xy}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_k \quad (11)$$

Onde  $Q_{ij}$  são as transformadas reduzidas dos coeficientes de rigidez dados por ,

$$\begin{aligned} \overline{Q}_{11} &= U_1 + U_2 \cos(2\theta) + U_3 \cos(4\theta) \\ \overline{Q}_{22} &= U_1 - U_2 \cos(2\theta) + U_3 \cos(4\theta) \\ \overline{Q}_{12} &= U_4 - U_3 \cos(4\theta) \\ \overline{Q}_{66} &= U_5 - U_3 \cos(4\theta) \\ \overline{Q}_{16} &= -\frac{1}{2}U_2 \sin(2\theta) - U_3 \sin(4\theta) \\ \overline{Q}_{26} &= -\frac{1}{2}U_2 \sin(2\theta) + U_3 \sin(4\theta) \end{aligned} \quad (12)$$

E os coeficientes elásticos U são:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{8}(3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}) \\ U_2 &= \frac{1}{2}(Q_{11} - Q_{22}) \\ U_3 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66}) \\ U_4 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}) \\ U_5 &= \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66}) \end{aligned} \quad (13)$$

O índice k representa a k-ésima camada do laminado e  $\theta$  é o ângulo medido no sentido anti-horário a partir da direção positiva do eixo x do laminado até a direção positiva do eixo 1 da lamina. A Eq.(9) pode ser invertida para o campo:

$$\{\varepsilon_{ij}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}_k \quad (14)$$

Onde a matriz de elasticidade da lamina  $S_{ij}$  é dada por:

$$[S] = [Q]^{-1} \quad (15)$$

e

$$\begin{aligned} S_{11} &= 1/E_{11} & ; & & S_{22} &= 1/E_{22} \\ S_{12} &= \frac{-\nu_{12}}{E_{11}} = \frac{-\nu_{21}}{E_{22}} & ; & & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}} \end{aligned} \quad (16)$$

Também, sob tensão plana:

$$\varepsilon_3 = S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2 \quad (17)$$

e

$$\gamma_{23} = \gamma_{31} = 0 \quad (18)$$

Similarmente, a Eq.(14) pode ser transformada para os eixos principais do material x-y do laminado torna-se:

$$\left\{ \varepsilon_{ij} \right\}_k = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \overline{S_{11}} & \overline{S_{12}} & \overline{S_{16}} \\ \overline{S_{12}} & \overline{S_{22}} & \overline{S_{26}} \\ \overline{S_{16}} & \overline{S_{26}} & \overline{S_{66}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k \quad (19)$$

Onde, assim como a rigidez transformada, a elasticidade transformada  $S_{ij}$  depende somente de  $E_{11}$ ,  $G_{12}$ ,  $E_{22}$ ,  $\nu_{12}$  e  $\theta$ . Usando as relações de transformação, as tensões e deformações relativas aos eixos 1-2 da lamina são relacionadas para aqueles em termos dos eixos x-y do laminado, e vice-versa, por:

$$\left\{ \sigma_{12} \right\} = [T] \left\{ \sigma_{xy} \right\}, \quad \left\{ e_{12} \right\} = [T] \left\{ e_{xy} \right\} \quad (20)$$

e

$$\left\{ \sigma_{xy} \right\} = [T]^{-1} \left\{ \sigma_{12} \right\}, \quad \left\{ e_{xy} \right\} = [T]^{-1} \left\{ e_{12} \right\} \quad (22)$$

Onde

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2\sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \quad (23)$$

Os coeficientes de rigidez da Eq. (9) podem também ser expressos em termos das constantes elásticas da Eq.(14) como segue:

$$Q_{11} = \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}, \quad Q_{22} = \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}$$

$$Q_{12} = \frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}, \quad Q_{66} = \frac{1}{S_{66}} \quad (24)$$

Para materiais isotrópicos:

$$\begin{aligned} E_{11} = E_{22} = E, \quad \nu_{12} = \nu_{21} = \nu, \quad G_{12} = G \\ S_{11} = S_{22} = \frac{1}{E}, \quad S_{12} = -\frac{\nu}{E}, \quad S_{66} = \frac{2(1+\nu)}{E} = \frac{1}{G} \\ Q_{11} = Q_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad Q_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}, \quad Q_{66} = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \end{aligned} \quad (25)$$

#### 4. CRITÉRIO DE FALHA ANISOTRÓPICO DE TSAI-HILL

A análise de Tsai-Hill considera a lâmina como sendo a unidade básica do laminado. O módulo do laminado, a rigidez e as matrizes de elasticidade são desenvolvidas a partir de quatro propriedades elásticas independentes da lâmina. A deformação laminar devido a qualquer carga aplicada é calculada conhecendo-se estas propriedades elásticas do laminado. Estas deformações do laminado são transformadas para fornecer  $\epsilon_{ij}$  de cada lâmina, a partir do qual  $\sigma_{ij}$  é computado. A iminência de falha de cada camada é então encontrada pelo critério de falha de Tsai-Hill (Sih & Skudra, 1985):

$$\left(\frac{\sigma_1}{X}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} + \left(\frac{\sigma_2}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S}\right)^2 = 1 \quad (26)$$

Onde  $\sigma_1$  é a tensão na direção das fibras,  $\sigma_2$  é a tensão perpendicular às fibras,  $\tau_{12}$  é a tensão de cisalhamento e X, Y e S são respectivamente as resistências paralela, perpendicular e cruzada às fibras.

Na prática, o carregamento de um laminado é incrementado até que a falha de uma ou mais camadas individuais seja indicada pelo critério acima. Cada falha de camada é então investigada para determinar se a degradação é induzida na matriz ou na fibra. Esta decisão é tomada a seguir. Se uma camada falha (seu estado de tensões atinge a superfície de falha de Tsai-Hill) mas o valor de  $\sigma_1$  fica abaixo da resistência da lâmina na direção das fibras, então a fratura é determinada como sendo falha da matriz. Por outro lado, se  $\sigma_1$  de uma camada rompida excede a correspondente resistência da lâmina, então a falha da fibra é assumida. Sobre a deterioração da matriz, a lâmina é assumida como estando descarregada transversalmente e na diagonal, e somente capaz de suportar as tensões longitudinais. Esta é a conclusão para que o equacionamento de  $E_{22}$  e  $G_{12}$  fechem em zero. Se a degradação da lâmina está na fibra naturalmente a total ruptura da camada é assumida e  $E_{11}$ ,  $E_{22}$  e  $G_{12}$  são feitos extremamente pequenos.

#### 5. ÂNGULO DE PROPAGAÇÃO DA TRINCA

A extensão do critério de Tsai-Hill a partir da Eq. (26) para a predição da direção de propagação de trincas em um material ortotrópico com uma descontinuidade ou uma concentração de tensão é apresentada como:

$$S_{th} = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\sigma_1}{X} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_2}{Y} \right)^2 - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X^2} + \left( \frac{\tau_{12}}{S} \right)^2 \right\} \quad (27)$$

Onde  $S_{th}$  é energia de deformação.

Este critério postula que a trinca inicia-se ou propaga-se em uma direção radial tal que a energia de deformação possua seu mínimo valor, isto é:

$$\frac{\partial S_{th}}{\partial \theta} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 S_{th}}{\partial \theta^2} > 0 \quad (28)$$

Se  $S_{th}$  tem mais de um valor mínimo ao redor da ponta da trinca ou da concentração de tensão, o maior dos mínimos prevê a direção de propagação da trinca, ou

$$S_{th} = (S_{th})_{\min}^{\max} \quad \text{para } \theta_{\text{crítico}} \quad (29)$$

Os valores de  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\tau_{12}$  podem ser obtidos desenvolvendo-se as integrações e transformações descritas, considerando ainda os modos de deformação a que estaria submetida uma trinca.

Como estamos trabalhando apenas em duas dimensões consideramos apenas os modos I e II, sendo então os três valores acima constituídos da soma de duas porções, uma relativa ao modo I e outra relativa ao modo II resultando, conforme descrito em (Sollero, 1994) :

$$\begin{aligned} \sigma_1 = & \frac{k_1}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right] + \\ & + \frac{k_2}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_2^2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{\mu_1^2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right] \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 = & \frac{k_1}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right] + \\ & + \frac{k_2}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right] \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \tau_{12} = & \frac{k_1}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} \right) \right] + \\ & + \frac{k_2}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} \right) \right] \end{aligned} \quad (32)$$

onde  $k_1$  e  $k_2$  são os fatores de intensidade de tensão para os modos I e II dados por:

$$k_1 = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ (2\pi r)^{\frac{1}{2}} \sigma_2(\theta = 0) \right\} \quad (33)$$

$$k_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ (2\pi r)^{\frac{1}{2}} \tau_{12}(\theta = 0) \right\} \quad (34)$$

e  $\mu_1$  e  $\mu_2$  são as duas raízes da equação característica com partes imaginárias positivas:

$$S_{11}\mu^4 - 2S_{16}\mu^3 + (2S_{12} + S_{66})\mu^2 - 2S_{26}\mu + S_{22} = 0 \quad (35)$$

O cálculo destes últimos quatro valores não necessitará ser implementado, pois posteriormente à rotina desenvolvida abaixo deverá ser implementada em um programa maior para o cálculo de propagação de trinca utilizando o método duplo dos elementos de contorno, o qual já calcula  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $k_1$  e  $k_2$ .

## 6. IMPLEMENTAÇÃO

Inicialmente foi desenvolvido um programa em FORTRAM que a partir dos valores das propriedades do material compósito descritas anteriormente calcula a energia de deformação  $S_{th}$  ao redor da ponta de uma trinca e encontra o ângulo crítico  $\theta_c$  conforme as condições descritas pelas Eq. (28) e Eq. (29). Este programa foi testado com dados de um exemplo apresentado por (Sih, 1991) e utilizado por (Mendonça, 1996), sendo seus resultados comparados conforme mostrado na Fig. 2 onde temos o ângulo de propagação da trinca em função do ângulo das fibras no compósito. Estes dados referem-se a uma trinca central inclinada, vide Fig. 1, e o material utilizado foi o Modulite II 5206 cujas propriedades são:  $E_1 = 158,03$  Gpa,  $E_2 = 15,31$  Gpa,  $G_{12} = 5,52$  Gpa,  $\nu_{12} = 0,34$ ,  $\nu_{23} = 0,43$

A partir das quais foram obtidos  $\mu_1 = 0,6116i$  e  $\mu_2 = 5,2532i$ .

Porém faltaram os valores de  $X$ ,  $Y$ ,  $S$  e  $r$  para o material utilizado, raros na literatura, sendo utilizados estes dados referentes ao Modulite II 5208, o material encontrado com propriedades mais próximas do Modulite II 5206. Portanto foram utilizados:  $X = 0,6895$  Gpa,  $Y = 0,0276$  Gpa,  $S = 0,0621$  Gpa e  $r = 0,1$  mm.

Comparando os resultados obtidos através do programa implementado com as outras teorias podemos verificar a validade dos mesmos pois as curvas são bem próximas. Algum erro era esperado em função de parte dos dados de entrada pertencer ao Modulite II 5208, além disso, por se tratar de teorias distintas é coerente que as curvas obtidas sejam distintas.

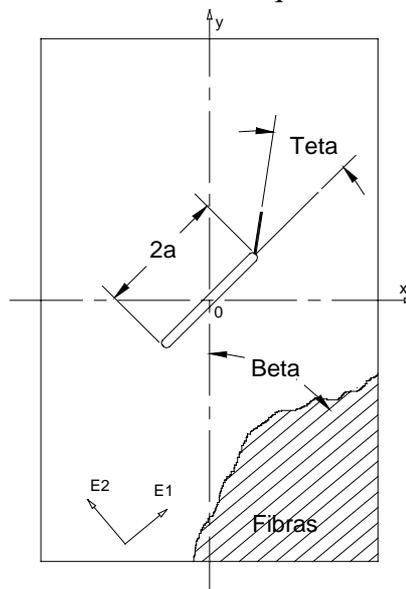


Figura 1 – Problema analisado: trinca central inclinada.

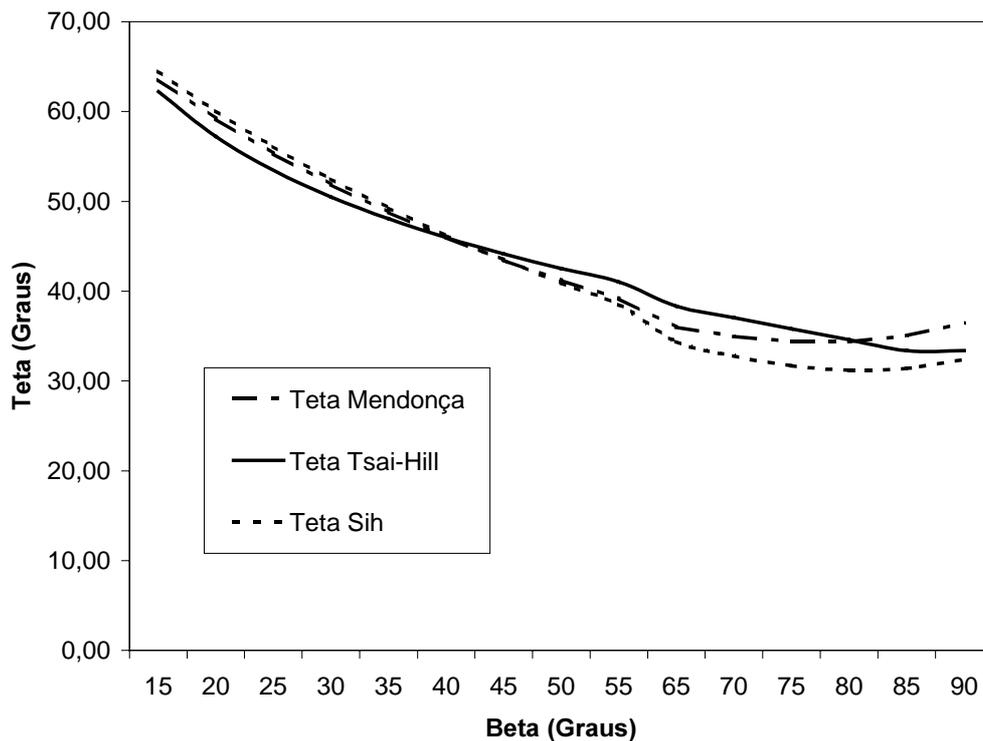


Figura 2 – Comparação entre os ângulos de propagação da trinca  $\theta$  em função do ângulo das fibras  $\beta$  pelas diversas teorias.

Após este teste a rotina desenvolvida foi inserida no programa de elementos de contorno desenvolvido por (Sollero, 1994) recebendo deste os dados de entrada e retornando-lhe o ângulo preferencial de propagação da trinca em cada iteração conforme esquematizado na Fig. 3. Optou-se nesta implementação pela manutenção das rotinas originais do programa para o cálculo do ângulo de propagação disponibilizando ambas as teorias em um único programa, sendo cada uma executada independente da outra, dependendo de uma opção no início do mesmo.

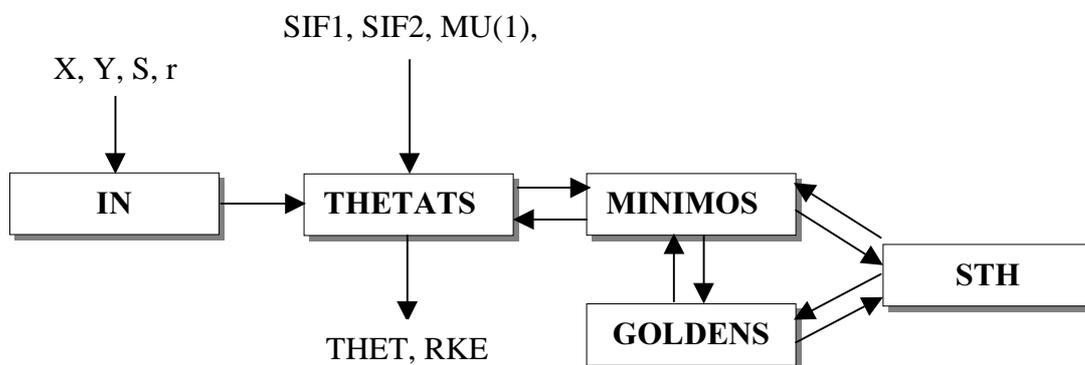


Figura 3 – Esquema da implementação da rotina THETATS para cálculo do ângulo de propagação em programa de elementos de contorno.

O objetivo deste programa é determinar o traçado preferencial de uma trinca em uma geometria plana construída em material compósito bem como as tensões e deformações

envolvidas neste processo. Testes iniciais apresentaram resultados satisfatórios porém exemplos mais detalhados devem ser executados para a completa verificação e validação do programa.

## 7. CONCLUSÕES

Com base nos resultados apresentados podemos concluir que o objetivo inicial do trabalho foi alcançado, ou seja, a teoria de Tsai-Hill para a propagação de trincas em materiais compósitos foi satisfatoriamente implementada e seus resultados são coerentes com os obtidos através de outras teorias de propagação. Contudo ainda são necessário testes mais rigorosos, com geometrias mais complexas, do software final e eventuais ajustes bem como o desenvolvimento de interfaces mais amigáveis para o mesmo.

### *Agradecimentos*

Este trabalho foi realizado graças a concessão de bolsa de iniciação científica pelo PIBIC-CNPq.

## REFERÊNCIAS

- Mendonça, S. G., *Propagação de Trincas em Materiais Compósitos segundo o Método Duplo dos Elementos de Contorno-Relatório final PIBIC-CNPq* (1996)
- Sih, G. C., *Mechanics of Fracture Initiation and Propagation*, Kluwer Academic Publishers (1991)
- Sih, G. C. e Skudra, A. M., *Failure Mechanics of Composites*, North-Holland (1985)
- Sollero, P., *Fracture Mechanics Analysis of Anisotropic Laminates by the Boundary Element Method*, PhD thesis, Southampton (1994)
- Zhang, S. Y. e Tsai, L. W., *Extending Tsai-Hill and Norris Criteria to Predict Cracking Direction in Orthotropic Materials*, *International Journal of Fracture* 40: R101-R104, Kluwer Academic Publishers (1989)

## **DEVELOPMENT AND IMPLEMENTATION OF PREDICTIVE TECHNIQUES TO CRACK PROPAGATION IN COMPOSITES USING THE DUAL BOUNDARY ELEMENT METHOD**

**Abstract.** *This work presents the Tsai-Hill theory to crack propagation in anisotropic materials applied in a boundary elements software. The objective of the software is to compute the crack propagation direction and the intensity of stress acting and resultant strains in plates of laminar composite materials. The numerical results obtained were compared with results obtained using the theory of the minimum strain energy density to crack propagation to validate them.*

**Keywords:** *Dual boundary elements methods, Composite materials, Predictive techniques, Anisotropy*